

Programme de colle n°5 (S6)
Semaine du 4 au 10 novembre

MPSI2

Mathématiques

NOMBRES COMPLEXES

- Définitions de groupe, sous-groupe et de morphisme de groupes, de corps, sous-corps et de morphisme de corps. L'objectif est uniquement d'introduire le vocabulaire. Aucun résultat n'a été établi et aucun exercice n'a été traité.
- Corps des nombres complexes — définition & premières propriétés.
- Formule du binôme de Newton. Factorisation de $a^n - b^n$. Sommes géométriques.
- Conjugué d'un nombre complexe. Propriétés.
- Module d'un nombre complexe. Propriétés.
- Groupe des nombres complexes de module 1.
- Définition & propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$. Formule de Moivre.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. $\arg(z)$ désigne l'ensemble des arguments de z et $\text{Arg}(z)$ désigne l'argument principal. Propriétés.
- Factorisation de $1 \pm e^{it}$ et de $e^{ip} \pm e^{iq}$.
- Exponentielle complexe. Propriétés. Résolution de $\exp(z) = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ où $a \in \mathbb{C}^*$.
- Applications à la trigonométrie (linéarisation et expression de $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ en fonction de \sin et \cos).
- Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
- Polynômes à coefficients complexes (*point de vue fonctionnel*). On a posé $X = \text{Id}_{\mathbb{C}}$. Unicité des coefficients (admise). Degré. Racines. Division euclidienne (admise). Si a est une racine de P , on peut factoriser P par $X - a$. Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
- Racines carrées d'un nombre complexe non nul
- Racines d'un trinôme du second degré à coefficients complexes. Factorisation et relation racines-coefficients.
- Groupe des racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité.
- Racines $n^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe non nul.
- Applications à la géométrie : distances et angles, alignement et orthogonalité, expression complexe des translations, rotations, homothéties et similitudes directes (dans ces expressions, on identifie un point avec son affixe).

Cours : inégalité triangulaire (avec cas d'égalité) ; calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$; résolution de $\exp(z) = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$; racines carrées d'un nombre complexe non nul ; racines d'un trinôme du second degré ; racines $n^{\text{ème}}$ de l'unité ; (\mathbb{U}_n, \times) est un groupe commutatif.