Programme de colle n°21
Semaine du 24 au 30 mars

MPSI2

Mathématiques

Espaces vectoriels & applications linéaires

Espaces vectoriels

— Définition. Règles de calcul.
— Exemples de référence.
— Combinaisons linéaires d'une famille finie, puis d'une famille quelconque, familles presque nulles.
— Espace vectoriel produit.
— Structure d'algèbre.
— Notion de sous-espace vectoriel et de sous-algèbre.
— Intersection de sev.
— Espace vectoriel engendré par une partie.
— Familles libres.
— Familles génératrices.
— Bases. **PAS DE THÉORIE DE LA DIMENSION.**
— Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation.
— Sous-espaces supplémentaires.

Applications linéaires

— Définition. Propriétés. Isomorphismes, automorphismes.
— Exemples.
— Opérations sur les applications linéaires. Structure d'algèbre de $\mathscr{L}(E)$. Binôme de Newton.
— Structure de groupe de $GL(E)$.
— Image directe et réciproque d'un *sev* par une application linéaire.
— Noyau et image. Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives.
— Projecteurs et symétrie. Définition. Propriétés. Caractérisation parmi les applications linéaires. *Nous n'avons traité que des exercices portant sur les projecteurs.*

Cours :
— intersection d'une famille quelconque de *sev* ;
— si $A \subset B$, $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$;
— si u est une combinaison linéaire de $(x_1, \ldots, x_n)$, $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n, u) = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$;
— $\text{Vect}\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i x_i, x_2, \ldots, x_n\right) = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$;
— caractérisation des applications linéaires injectives par le noyau ;
— la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme ;
— si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, $\text{Im}(f) = \text{Vect}\big((f(x_i))_{i \in I}\big)$.
— caractérisation de la somme directe ;
— caractérisation des projecteurs.