Programme de colle n°25
Semaine du 12 au 18 mai

MPSI2

Mathématiques

Matrices I

— Définition. Matrices carrées, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, scalaires, matrice identité, matrices triangulaires supérieures.
— Matrice d'un vecteur dans une base, d'une famille de vecteurs, matrice d'une familles de formes linéaires, matrice d'une application linéaire dans des bases (notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(u)$), matrice d'un endomorphisme dans une base.
— Transposition.
— Structure d'espace vectoriel de dimension finie. Dimension. Isomorphisme avec $\mathscr{L}(E,F)$. Linéarité de la transposition. Les ensembles des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, des matrices antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, des matrices diagonales $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, des matrices triangulaires supérieures $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des *sev*. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires. Dimensions.
— Matrice d'une composée & multiplication matricielle. Matrices de $u(x)$et de $u \circ v$ où $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$et $x \in E$.
— Structure d'algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et isomorphisme avec $\mathscr{L}(E)$.
— Application linéaire canoniquement associée à une matrice A.
— Puissances et polynômes matriciels. Exemples de calcul de puissance à l'aide d'un polynôme annulateur et du binôme de Newton.
— Exemples d'application au calcul du $n^{\text{ème}}$ terme de suites définies par des relations de récurrences couplées.
— Inverse d'une matrice. Lien avec l'isomorphisme réciproque. Groupe $GL_n(\mathbb{K})$ et isomorphisme avec $\mathrm{GL}(E)$.
— Trace. Propriétés.

L'interrogation commence nécessairement par un exemple simple de détermination de la matrice d'une application linéaire ou l'opération inverse

Cours :
— $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires ;
— matrice d'une composée ;
— formule $E_{i,j}E_{k,l}$;
— calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
— calcul de $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
— $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et la trace est un invariant de similitude.