Programme de colle n°28
Semaine du 9 au 15 juin

MPSI2

Mathématiques

Déterminant

- Groupe symétrique.
  - Cardinal, transpositions, cycles.
  - Toute permutation est un produit de transpositions.
  - Signature d'une permutation. La signature est un morphisme de groupes.
  - Groupe alterné.
- Formes n-linéaires alternées.
  - Définitions.
  - Une forme n-linéaire alternée est antisymétrique.
  - Expression d'une forme n-linéaire alternée sur un espace de dimension n dans une base.
  - L'ensemble des formes n-linéaires alternées est une droite vectorielle.
  - Si φ est une forme n-linéaire alternée non nulle, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base si et seulement si, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.
- Déterminant dans une base.
  - Caractérisation des bases.
  - Formule de changement de base.
- Déterminant d'un endomorphisme.
  - Définition
  - Propriétés élémentaires.
  - f est un automorphisme si, et seulement si $\det(f) \neq 0$. Déterminant de f^{-1}.
- Déterminant d'une matrice.carrée.
  - Définition. Formule explicite.
  - Lien entre le déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme et celui des matrices associées.
  - Propriétés élémentaires.
  - A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Déterminant de A^{-1}.
  - Déterminant de la transposée.
  - Déterminant d'une matrice 2×2.
  - Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.
  - Calculs par bloc.
  - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.
  - Déterminant de Vandermonde.
  - Mineurs et Cofacteurs. Développement selon une ligne ou une colonne.
  - Comatrice. $\mathrm{Com}(A)^{\intercal} A = A\mathrm{Com}(A)^{\intercal} = \det(A) I_n$.
- Formules de Cramer.

Cours :

- expression d'une forme n-linéaire alternée dans une base ;
- déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ;
- déterminant de la transposée ;
- déterminant de Vandermonde ;
- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1$.