

Programme de colle n°16

Semaine du 2 au 8 février

MPSI2

Mathématiques

LIMITES DE FONCTIONS & RELATIONS DE COMPARAISON

- Éléments de topologie élémentaire. Notion de voisinage.
- Fonctions remarquables d'une variable réelle : fonctions monotones, périodiques, lipschitziennes, paires, impaires, fonctions majorées, minorées, bornées.
- Définitions de $f \xrightarrow[a]{} \ell$, suivant les cas. Définition unifiée à l'aide des voisinages.
- Théorème de caractérisation séquentielle de la limite.
- Opérations sur les limites (démontrées à l'aide du théorème de caractérisation séquentielle de la limite).
- Liens avec l'ordre.
- Théorème des gendarmes.
- Théorème de la limite monotone.
- Relation d'équivalence. Définition. Propriétés. Équivalents usuels.
- Négligeabilité. Définition. Propriétés. Relations de négligeabilité usuelles.
- Domination. Définition & propriétés.

Cours : Démontrer sur des exemples les propriétés d'opérations sur les limites. Par exemple :

1. Soient $f :]2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (a) On suppose que $f \xrightarrow[2]{} -3$ et $g \xrightarrow[2]{} 2$. Montrer à l'aide des définitions que $f \times g \xrightarrow[2]{} -6$, que $f + g \xrightarrow[2]{} -1$ et que $\frac{f}{g} \xrightarrow[2]{} -\frac{3}{2}$.
 - (b) On suppose que $f \xrightarrow[2]{} -\infty$ et $g \xrightarrow[2]{} 1$. Montrer à l'aide des définitions que $\frac{g}{f} \xrightarrow[2]{} 0$.
2. Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (a) On suppose que $f \xrightarrow[+\infty]{} 3$ et $g \xrightarrow[+\infty]{} 2$. Montrer à l'aide des définitions que $f \times g \xrightarrow[+\infty]{} 6$ et que $f - g \xrightarrow[+\infty]{} 1$.
 - (b) On suppose que $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ et $g \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$. Montrer à l'aide des définitions que $f \times g \xrightarrow[+\infty]{} -\infty$ et que $f - g \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.