

Programme de colle n°21  
Semaine du 23 au 29 mars

MPSI2

Mathématiques

## ESPACES VECTORIELS & APPLICATIONS LINÉAIRES

### Espaces vectoriels

- Définition. Règles de calcul.
- Exemples de référence.
- Combinaisons linéaires d'une famille finie, puis d'une famille quelconque, familles presque nulles.
- Espace vectoriel produit.
- Structure d'algèbre.
- Notion de sous-espace vectoriel et de sous-algèbre.
- Intersection de sev.
- Espace vectoriel engendré par une partie.
- Familles libres.
- Familles génératrices.
- Bases. **PAS DE THÉORIE DE LA DIMENSION.**
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Caractérisation.
- Sous-espaces supplémentaires.

### Applications linéaires

- Définition. Propriétés. Isomorphismes, automorphismes.
- Exemples.
- Opérations sur les applications linéaires. Structure d'algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ . Binôme de Newton.
- Structure de groupe de  $GL(E)$ .
- Image directe et réciproque d'un sev par une application linéaire.
- Noyau et image. Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives.
- Projecteurs et symétrie. Définition. Propriétés. Caractérisation parmi les applications linéaires. *Nous n'avons traité que des exercices portant sur les projecteurs.*

#### Cours :

- intersection d'une famille quelconque de sev ;
- si  $A \subset B$ ,  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$  ;
- si  $u$  est une combinaison linéaire de  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, u) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  ;
- $\text{Vect}\left(x_1 + \sum_{i=2}^n \lambda_i x_i, x_2, \dots, x_n\right) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  ;
- la bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme ;
- si  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$ ,  $\text{Im}(f) = \text{Vect}((f(x_i))_{i \in I})$ .
- caractérisation de la somme directe ;
- caractérisation des projecteurs.