Programme de colle n°22
Semaine du 30 mars au 5 avril

MPSI2

Mathématiques

Espaces vectoriels de dimension finie

1 Théorie de la dimension

- Lemme de l'échange.
- Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (existence d'une famille génératrice finie). Existence d'une base en dimension finie. Toutes les bases ont même cardinal. Dimension d'un espace de dimension finie.
- Théorème de la base incomplète (formes faibles et fortes). Théorème de la base extraite.
- Les bases sont les familles libres maximales et les familles génératrices minimales.
- Sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
- Tout sev d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
- Dimension d'un produit cartésien.
- Dimension d'une somme directe, puis d'une somme (formule de Grassmann).

2 Applications linéaires en dimension finie

- Image d'une famille libre par une application linéaire injective, d'une famille génératrice par une application linéaire surjective.
- Caractérisation d'une application linéaire sur une base.
- Isomorphismes et dimension. Dimension de $\mathscr{L}(E, F)$.
- Rang d'une application linéaire. Le rang est conservé par composition par un automorphisme.
- Théorème du rang (u induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ sur $\mathrm{Im}(u)$). Formule du rang.
- Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$, alors u est un isomorphisme ssi u est injective ssi u est surjective.
- En dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ est inversible ssi u est inversible à gauche ssi u est inversible à droite.

Questions de cours :
- un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base & toutes les bases ont même cardinal ;
- image d'une famille libre par une applications linéaire injective et d'une famille génératrice par une application linéaire surjective ;
- caractérisation d'une application linéaire sur une base ;
- théorème et formule du rang ;
- si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$, u est un isomorphisme ssi u est injective ssi u est surjective.