

Programme de colle n°23

Semaine du 6 au 12 avril

MPSI2

Mathématiques

DUALITÉ & MATRICES I

Dualité

- Formes linéaires. Formes linéaires coordonnées associées à une base.
- Hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle). Équivalence avec l'existence d'une droite supplémentaire. Dimension d'un hyperplan en dimension finie.
- Dimension de l'intersection de m hyperplans.
- Tout *sev* de dimension m est l'intersection de $n - m$ hyperplans.
- Base duale en dimension finie.

Matrices I

- Définition. Matrices carrées, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, scalaires, matrice identité, matrices triangulaires supérieures.
- Matrice d'un vecteur dans une base, d'une famille de vecteurs, matrice d'une famille de formes linéaires, matrice d'une application linéaire dans des bases (notation $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$), matrice d'un endomorphisme dans une base.
- Transposition.
- Structure d'espace vectoriel de dimension finie. Dimension. Isomorphisme avec $\mathcal{L}(E, F)$. Linéarité de la transposition. Les ensembles des matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, des matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des *sev*. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires. Dimensions.
- Matrice d'une composée & multiplication matricielle. Matrices de $u(x)$ et de $v \circ u$ où $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ et $x \in E$.
- Structure d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et isomorphisme avec $\mathcal{L}(E)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice A . Noyau, image, rang d'une matrice.
- Puissances et polynômes matriciels. Exemples de calcul de puissance à l'aide d'un polynôme annulateur et du binôme de Newton.
- Exemples d'application au calcul du $n^{\text{ème}}$ terme de suites définies par des relations de récurrences couplées.
- Inverse d'une matrice. Lien avec l'isomorphisme réciproque. Groupe $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et isomorphisme avec $\text{GL}(E)$.
- Trace. Propriétés.

L'interrogation commence nécessairement par un exemple simple de détermination de la matrice d'une application linéaire ou l'opération inverse.

Cours :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires;
- matrice d'une composée;
- calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- calcul de $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.