Programme de colle n°24
Semaine du 13 au 19 avril

MPSI2

Mathématiques

Matrices II

- Définition. Matrices carrées, matrices symétriques, antisymétriques, diagonales, scalaires, matrice identité, matrices triangulaires supérieures.
- Matrice d'un vecteur dans une base, d'une famille de vecteurs, matrice d'une application linéaire dans des bases (notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}_F \leftarrow \mathscr{B}_E}(u)$), matrice d'un endomorphisme dans une base (notation $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$).
- Transposition.
- Structure d'espace vectoriel de dimension finie. Dimension. Isomorphisme avec $\mathscr{L}(E, F)$. Linéarité de la transposition. Les ensembles des matrices symétriques $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, des matrices antisymétriques $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, des matrices diagonales $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, des matrices triangulaires supérieures $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ sont des *sev*. $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires. Dimensions.
- Matrice d'une composée & multiplication matricielle. Matrices de $u(x)$ et de $v \circ u$ où $(u, v) \in \mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(F, G)$ et $x \in E$.
- Structure d'algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et isomorphisme avec $\mathscr{L}(E)$.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice A. Noyau et image d'une matrice.
- Puissances et polynômes matriciels. Exemples de calcul de puissance à l'aide d'un polynôme annulateur ou du binôme de Newton.
- Exemples d'application au calcul du $n^{\text{ème}}$ terme de suites définies par des relations de récurrences couplées.
- Inverse d'une matrice. Lien avec l'isomorphisme réciproque. Groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et isomorphisme avec $\mathrm{GL}(E)$.
- Trace. Propriétés
- Inversibilité et rang.
- Matrices de passage, propriétés.
- Formules de changement de bases pour les vecteurs, les applications linéaires et les endomorphismes.
- Équivalence matricielle. Propriétés. Décomposition $PJ_{n,p,r}Q$ (démonstrations géométrique). Caractérisation par le rang.
- A et $A^\intercal$ ont le même rang.
- Similitude matricielle. Propriétés. La trace et le rang sont des invariants de similitude.
- Matrices d'opérations élémentaires. Propriétés. Algorithme du pivot de Gauss. Obtention de la décomposition $PJ_{n,p,r}Q$ par pivot sur les lignes et les colonnes.
- Toute matrice inversible peut être transformée en I_n par des opérations élémentaires sur les lignes. Application au calcul de l'inverse.
- Systèmes linéaires. Interprétations linéaire et matricielle.
- Systèmes de Cramer.

Cours :

— formule $E_{i,j}E_{k,l}$;
— $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ & la trace est un invariant de similitude ;
— formules de changement de bases pour les applications linéaires et les endomorphismes ;
— décomposition $PJ_{n,p,r}Q$ (démonstration géométrique) ;
— décomposition $PJ_{n,p,r}Q$ (démonstration par pivot de Gauss).