

Programme de colle n°27

Semaine du 1 au 7 juin

MPSI2

Mathématiques

DÉTERMINANT

- Groupe symétrique.
 - Cardinal, transpositions, cycles.
 - Toute permutation est un produit de transpositions.
 - Signature d'une permutation. La signature est un morphisme de groupes.
 - Groupe alterné.
- Formes n -linéaires alternées.
 - Définitions.
 - Une forme n -linéaire alternée est antisymétrique.
 - Expression d'une forme n -linéaire alternée sur un espace de dimension n dans une base.
 - L'ensemble des formes n -linéaires alternées est une droite vectorielle.
 - Si φ est une forme n -linéaire alternée non nulle, alors (x_1, \dots, x_n) est une base si et seulement si, $\varphi(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.
- Déterminant dans une base.
 - Caractérisation des bases.
 - Formule de changement de base.
- Déterminant d'un endomorphisme.
 - Définition
 - Propriétés élémentaires.
 - f est un automorphisme si, et seulement si $\det(f) \neq 0$. Déterminant de f^{-1} .
- Déterminant d'une matrice carrée.
 - Définition. Formule explicite.
 - Lien entre le déterminant d'une famille de vecteurs et d'un endomorphisme et celui des matrices associées.
 - Propriétés élémentaires.
 - A est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Déterminant de A^{-1} .
 - Déterminant de la transposée.
 - Déterminant d'une matrice 2×2 .
 - Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure.
 - Calculs par bloc.
 - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.
 - Déterminant de Vandermonde.
 - Mineurs et Cofacteurs. Développement selon une ligne ou une colonne.
 - Comatrice. $\text{Com}(A)^T A = A \text{Com}(A)^T = \det(A) I_n$.
- Formules de Cramer.

Cours :

- déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ;
- déterminant de la transposée ;
- déterminant de Vandermonde ;
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \iff \det(A) = \pm 1$.
- $\text{rg}(\text{Com}(A))$ en fonction de $\text{rg}(A)$. Application à l'expression de $\text{Com}(\text{Com}(A))$ ($n \geq 3$).