Programme de colle n°28
Semaine du 8 au 14 juin

MPSI2

Mathématiques

Intégration

- Continuité uniforme (**ne fera pas l'objet d'exercices**). Propriétés. Théorème de Heine.
- Intégrales de Riemann.
  - Subdivisions, fonctions en escaliers, fonctions continues par morceaux. Propriétés.
  - Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que $\forall t \in [a, b]$, $|f(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$.
  - Intégrale des fonctions en escalier. Linéarité, relation de Chasles, positivité, inégalité triangulaire.
  - Intégrabilité des fonctions continues par morceaux sur un segment.
  - Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$.
  - Linéarité, positivité, relation de Chasles, positivité. Inégalité triangulaire.
  - Si f est continue, positive, non nulle et si $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$.
  - Théorème de convergence des sommes de Riemann pour les fonctions continues par morceaux (démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$).
- Intégration et dérivation
  - Si f est continue par morceaux, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est continue.
  - Si f est continue, alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et est une primitive de f.
  - $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$ si f est continue et si F est une primitive de f.
  - Intégration par parties.
  - Changement de variables.
  - Cas des fonctions paires, impaires, et périodiques.
  - Formule de Taylor avec reste intégral (rappel).
  - Inégalité de Taylor-Lagrange.
- *Révision du calcul de primitives vu en début d'année.*

Cours :
- Si f est continue sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$;
- si f est cpm sur un intervalle I, continue en $x_0 \in I$ et si $a \in I$, alors $F : x \mapsto \int_a^x f$ est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$;
- convergence des sommes de Riemann dans le cas lipschitzien ;
- inégalité de Taylor-Lagrange.