Colle 4 / S5

Nombres complexes II

Semaine du 12 au 18 octobre

Calculs, module et arguments

- Vocabulaire : groupes, sous-groupes, corps, sous-corps et morphismes. **Seules les définitions sont exigibles ; aucun exercice ne peut être posé pour le moment.**
- Corps des nombres complexes — définition & premières propriétés.
- Formule du binôme de Newton. Factorisation de $a^n - b^n$. Sommes géométriques.
- Conjugué d'un nombre complexe. Propriétés.
- Module d'un nombre complexe. Propriétés. Inégalités triangulaires et cas d'égalité.
- Groupe des nombres complexes de module 1.
- Définition et propriétés de $\theta \mapsto e^{i\theta}$. Formules d'Euler et de Moivre.
- Arguments d'un nombre complexe non nul. $\arg(z)$ désigne l'ensemble des arguments de z et $\mathrm{Arg}(z)$ désigne l'argument principal. Propriétés.
- Factorisation de $1 \pm e^{it}$ et de $e^{ip} \pm e^{iq}$.
- Exponentielle complexe. Propriétés. Résolution de $\exp(z) = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ où $a \in \mathbb{C}^*$.
- Applications à la trigonométrie (linéarisation et expression de $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$ en fonction de sin et cos).
- Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.

Polynômes, racines et géométrie

- Fonctions polynomiales à coefficients complexes (point de vue naïf). *Tous les résultats sont admis.* Notation $X := \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Unicité des coefficients. Degré. Racines. Division euclidienne. Si a est une racine de P, on peut factoriser P par $X - a$. Un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes.
- Racines carrées d'un nombre complexe non nul.
- Racines d'un trinôme du second degré à coefficients complexes. Factorisation et relations racines-coefficients.
- Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
- Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.
- Applications à la géométrie : distances et angles, alignement et orthogonalité, expression complexe des similitudes directes ; cas particuliers des translations, homothéties et rotations. Dans ces expressions, on identifie un point avec son affixe.

Questions de cours

Énoncés et démonstrations à connaître

— Inégalité triangulaire (avec cas d'égalité).

— Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

— Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, résolution de $\exp(z) = a$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

— Racines carrées d'un nombre complexe non nul.

— Racines d'un trinôme du second degré et factorisation.

— Racines n-ièmes de l'unité.

— $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe commutatif.