Colle 5 / S6

Éléments d'analyse

Semaine du 2 au 8 novembre

Injectivité, surjectivité, bijectivité

L'objectif est d'introduire rapidement le vocabulaire. À ce stade, aucun exercice théorique ne peut porter sur ces notions.

- Définitions.
- Composée d'injections, de surjections, de bijections.
- Caractérisation de la bijectivité par l'existence d'une réciproque. Unicité. *Le résultat est admis provisoirement.*

Calcul de dérivées

- Rappel des définitions.
- Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables.
- Dérivée d'une composée de fonctions dérivables. Dérivée d'une réciproque.
- Dérivées des fonctions usuelles.
- Applications à l'étude des variations : caractérisation des fonctions croissantes et strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.

Généralités sur les fonctions

- Étude des symétries : parité, imparité, périodicité, etc.
- Fonctions majorées, minorées, bornées. Maximum et minimum d'une fonction.
- Monotonie et stricte monotonie d'une fonction.

Convexité

- Définition d'une fonction convexe sur un intervalle.
- Inégalité de Jensen.
- Théorème des pentes croissantes. Les fonctions pente sont croissantes.
- Si f est convexe et dérivable en a, son graphe se situe au-dessus de la tangente en a.
- Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables. *Pour la démonstration, le théorème des accroissements finis est admis.*
- Caractérisation parmi les fonctions deux fois dérivables.
- Une application : l'inégalité arithmético-géométrique.

Questions de cours

Énoncés et démonstrations à connaître

— Dérivée d'un produit en un point : si I est un intervalle non réduit à un point, $a \in I$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables en a, alors fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$ (à l'aide de l'inégalité des accroissements finis).

— Théorème des pentes croissantes (sens direct). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle I. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in I^3$ tel que $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

— Encadrement du sinus : pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

— Inégalité arithmético-géométrique : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

— Les fonctions dérivables $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ sont exactement les fonctions $x \mapsto c\ln(x)$, où $c \in \mathbb{R}$.

— Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et convexe sur un intervalle I, alors f' est croissante sur I.

On demandera ensuite le calcul d'une dérivée explicite.