Colle 6 / S7
Fonctions usuelles

Semaine du 9 au 15 novembre

Théorèmes admis

- Théorème fondamental de l'analyse.
- Théorème de la limite monotone.
- Théorème de l'homéomorphisme : toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone sur un intervalle I induit un homéomorphisme de I sur $J = f(I)$.

Fonctions usuelles

- Logarithme népérien et exponentielle : définitions, domaines, propriétés algébriques, dérivées, variations, limites et graphes. Logarithmes en base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, notamment logarithme décimal.
- Fonctions puissance : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$. Règles de calcul, dérivées, variations et limites.
- Croissances comparées des logarithmes, des puissances et des exponentielles ; limites usuelles en 0, en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Fonctions circulaires et réciproques : restrictions de sin, cos et tan définissant les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan. Domaines et images, parité, dérivées, variations, limites et graphes. Identités de composition.
- Fonctions hyperboliques sh, ch et th : définitions à l'aide de l'exponentielle, parité, dérivées, variations, limites et graphes. Relations entre ces fonctions et formules d'addition.
- Dérivation des fonctions à valeurs complexes : définition à l'aide des parties réelle et imaginaire, règles de calcul. Dérivée de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$, où $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est dérivable sur un intervalle I.

Questions de cours

Énoncés et démonstrations à connaître

— Pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

— Pour tout $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

— Dérivées des fonctions arc sinus et arc tangente.

— Calcul de $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

— Résoudre l'équation $\mathrm{Arctan}(2x) + \mathrm{Arctan}(3x) = \dfrac{\pi}{4}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

— Montrer que $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{5}{13}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{56}{65}\right)$.