Colle 8 / S9

Équations différentielles

Semaine du 23 au 29 novembre

Dans ce programme, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Primitives (révision)

- Liens entre primitives et intégrales. Primitives usuelles, changement de variables et intégration par parties.
- Calculs par décomposition en éléments simples : **dénominateurs scindés**.

Premier ordre

- Soient I un intervalle non réduit à un point et $a, b : I \to \mathbf{K}$ deux fonctions continues. Équations résolues de la forme
$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$
d'inconnue $y : I \to \mathbf{K}$ dérivable.
- Cas homogène ; cas avec second membre non nul ; principe de superposition et méthode de variation de la constante.
- Problème de Cauchy.
- Problèmes de raccordement : nous avons seulement traité deux exemples en TD ; **ils ne sont pas prioritaires cette semaine**.

Second ordre à coefficients constants

- Cas homogène : polynôme caractéristique associé ; recherche des solutions à valeurs complexes, puis réelles.
- Second membre de type polynomial et du type $t \mapsto e^{\alpha t}$, où $\alpha \in \mathbf{C}$. Principe de superposition.
- Problème de Cauchy *(admis)*.

Questions de cours

Énoncés et démonstrations à connaître

- Formule de changement de variables. Soient I, J deux intervalles non réduits à un point, $f : I \to \mathbf{K}$ continue et $\varphi : J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que, pour tout $(a, b) \in J^2$,
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$
- Soient I un intervalle non réduit à un point, $a : I \to \mathbf{K}$ continue et A une primitive de a sur I. Montrer que les solutions de l'équation
$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = 0,$$
d'inconnue $y : I \to \mathbf{K}$ dérivable, sont exactement les fonctions $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, où λ décrit $\mathbf{K}$.
- Soient I un intervalle non réduit à un point, $a, b : I \to \mathbf{K}$ continues, A une primitive de a sur I et $\lambda : I \to \mathbf{K}$ dérivable. On pose $\varphi : I \to \mathbf{K}$, $t \mapsto \lambda(t)e^{-A(t)}$. Montrer que la condition
$$\forall t \in I,\ \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$$
suffit pour que φ soit solution de l'équation
$$\forall t \in I,\ y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$
d'inconnue $y : I \to \mathbf{K}$ dérivable.
- Déterminer une solution particulière de l'équation $\forall t \in \mathbf{R},\ y''(t)+3y'(t)+2y(t) = e^{-t}$, d'inconnue $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable.